Podmiot matematyczny Hilberta

Bartosz Brożek
Uniwersytet Jagielloński,
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych
Adam Olszewski
Uniwersytet Papieski Jana Pawła II,
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

Hilbert's mathematical subject

Abstract

The aim of this paper is threefold. First, on the basis of Gordan's problem and Hilbert's basis theorem we want to say a few words about the formation of Hilbert's philosophy of mathematics in the late nineteenth and early twentieth centuries. Second, we attempt to reconstruct Hilbert's Program highlighting the role of reasoning which is not conducted within the axiomatic system. Third, we formulate and try to justify the claim that Hilbert's Program assumes some metaphysics of the subject that – in general terms – is identical with Kant's transcendental subject.

Key words:

philosophy of mathematics, mathematical subject, David Hilbert

Cel tego eseju jest trojaki. Po pierwsze, chcemy – na przykładzie problemu Gordana i Hilberta twierdzenia o bazie – powiedzieć parę słów na temat kształtowania się Hilbertowskiej filozofii matematyki na przełomie XIX i XX wieku. Po drugie, podejmiemy próbę rekonstrukcji programu Hilberta, podkreślając rolę, jaką odgrywają w nim rozumowania *pozasystemowe*, tj. takie, które nie dokonują się w obrębie systemu aksjomatycznego. Po trzecie wreszcie, sformułujemy i spróbujemy uzasadnić pogląd, że program Hilberta zakłada pewną metafizykę podmiotu, który – w ogólnych zarysach – jest tożsamy z podmiotem transcendentalnym Kanta[1].

1. Teologia czy matematyka?

W 1888 roku David Hilbert rozwiązał tzw. problem Gordana. Opublikował swój wynik w „Mathematische Annalen" w 1890 roku. W reakcji na to osiągnięcie Paul Gordan miał powiedzieć: „To nie jest matematyka, to jest teologia!". Jak ustalili historycy, sformułowanie to zostało przypomniane dopiero 24 lata później, w 1914 roku, przez Maxa Noethera w mowie pogrzebowej na cześć Gordana[2]. Powiedzenie Gordana zrobiło później wielką karierę. Komentowali je matematycy i historycy matematyki, choćby Hermann Weyl, Gerhard Kowalewski, Eric Temple Bell,

[1] Podobne rozwa34~harris/theology.pdf.
[2] Por. C. McLarty, dz. cyt., s. 1.

Felix Klein czy Leonard Blumenthal, różniąc się w swych interpretacjach. Zdaniem niektórych Gordan chciał podkreślić, że zaproponowane przez Hilberta rozwiązanie trudno uznać za dowód matematyczny; według innych celem Gordana było podkreślenie wielkości osiągnięcia Hilberta, który miałby doznać boskiej iluminacji[3].

Co było przedmiotem tego „teologicznego dowodu"? Zainteresowania matematyczne Gordana koncentrowały się wokół algebraicznej teorii niezmienników. W 1868 roku udowodnił on konstruktywnie twierdzenie głoszące, że niezmienniki systemów form binarnych (z dwoma zmiennymi) posiadają skończoną bazę[4]. Jego dowód w istocie polegał na rozpatrywaniu szczegółowych przypadków. Bezskutecznie próbował natomiast udowodnić, że niezmienniki systemów form dowolnego rzędu i dla dowolnej liczby zmiennych także mają skończoną bazę. W swych badaniach posunął się jednak daleko. Wykorzystując *metodę symboliczną*, był w stanie zaproponować techniki, które pozwoliły mu na scharakteryzowanie systemu niezmienników dla formuł szóstego rzędu, a także na przybliżony opis systemu niezmienników dla formuł ósmego rzędu. Istotną rolę w tych badaniach odgrywała, jak zaznaczyliśmy, metoda symboliczna. Jej ciekawą cechą było to, że Gordan zabraniał przypisywania symbolom jakiegoś konkretnego

[3] Tamże, s. 1–2.

[4] Przez formę binarną należy w istocie rozumieć to, co dzisiaj jest wielomianem jednej zmiennej. I tak np. odpowiednikiem wielomianu $P(x) = Ax^2 + 2Bx + C$ była binarna forma $F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

znaczenia w trakcie obliczeń. Było to dopuszczalne jedynie na kluczowych etapach rachunków[5].

Hilberta twierdzenie o bazie, opublikowane – jak wspomnieliśmy – w 1890 roku, głosi, że *istnieje* skończona baza dla niezmienników systemów form dowolnego rzędu i dla dowolnej liczby zmiennych. W dzisiejszej terminologii twierdzenie o bazie wypowiedzieć można następująco:

> [Twierdzenie Hilberta o bazie]
>
> Dowolny ideał w $K[x_1,\ldots,x_n]$ jest skończenie generowalny.
>
> *K* jest ciałem, do którego należą współczynniki wielomianów. Ideał jest *skończenie generowalny*, gdy ma *skończoną bazę*. Skończoną bazą ideału jest zbiór jego elementów, taki że każdy element ideału da się uzyskać z bazy za pomocą operacji sumy lub iloczynu.

Dowód Hilberta miał charakter niekonstruktywny: wykorzystywał zasadę wyłączonego środka i dowodził jedynie istnienia skończonej bazy, nie podając jakiejś bliższej jej charakterystyki. Początkowa reakcja Gordana, choć nie całkiem negatywna, była sceptyczna. W swej recenzji pracy Hilberta dla „Mathematische Annalen" pisał:

> (…) muszę z przykrością powiedzieć, że nie jestem tym [dowodem] usatysfakcjonowany. Twierdzenia są w rzeczy samej bar-

[5] C. McLarty, dz. cyt., s. 6.

> dzo ważne i poprawne, moja krytyka nie odnosi się więc do nich. Dotyczy ona raczej dowodu podstawowego twierdzenia, które nie spełnia najbardziej skromnych wymogów, jakie stawia się przed dowodami matematycznymi. Nie wystarczy stwierdzić, że autor uważa kwestię za jasną. Wymagać należy, by zbudował on dowód, wykorzystując bezpieczne reguły[6].

Wydaje się przy tym, że przedmiotem niezadowolenia Gordana nie było wykorzystanie przez Hilberta metod infinitystycznych. Mówiąc, że mamy tu do czynienia z „teologią, a nie matematyką", Gordan dawał wyraz innym obawom. W 1893 roku pisał: „dowód Hilberta jest poprawny co do zasady. Niemniej wyczuwam lukę w jego wyjaśnieniu: zadowala się on dowiedzeniem istnienia rozwiązań, nie rozważając ich własności"[7]. Po kilku latach Hilbert przedstawił konstruktywny dowód swego twierdzenia.

Historia ta jest ciekawa z kilku powodów. Po pierwsze, w zmaganiach z teorią niezmienników algebraicznych istotną rolę odgrywała metoda symboliczna, której mistrzem był Gordan, a także uczennica Gordana i Hilberta – Emmy Noether. Metoda ta – w nieco innym kontekście – pełniła, jak zobaczymy, kluczową funkcję w programie Hilberta. Po drugie, w trakcie „sporu" z Gordanem Hilbert zetknął się z zarzutem związanym

[6] D. Hilbert, F. Klein, *Der Briefwechsel David Hilbert – Felix Klein*, red. G. Frei, Göttingen 1985, s. 65; cyt. za: C. McLarty, dz. cyt.
[7] P. Gordan, *Ueber einen Satz von Hilbert*, „Mathematische Annalen" 1893, vol. 42, s. 132; cyt. za: C. McLarty, dz. cyt.

z ideą dowodu w matematyce. Zdaniem Gordana, a jeszcze bardziej Leopolda Kroneckera, dowód powinien mieć charakter konstruktywny.

Te doświadczenia wpłynęły niewątpliwie na rozwój idei filozoficznych Hilberta. Dodać do nich należy jeszcze dwa źródła filozoficzno-matematycznej inspiracji. Pierwszy z nich to idea aksjomatyzacji. Od początku lat dziewięćdziesiątych XIX wieku Hilbert wykładał podstawy geometrii. Zgodnie z relacją Blumenthala w 1891 roku Hilbert wysłuchał wykładów Hermanna Wienera na temat podstaw geometrii. Wiener powiedział podczas tego wykładu, że:

> Także dla geometrii znaczenie ma tego rodzaju powrót do najprostszych przedmiotów i operacji, ponieważ z tych można odwrotnie zbudować pewną abstrakcyjną naukę, która jest niezależna od aksjomatów geometrii, ale której twierdzenia są krok po kroku paralelne do twierdzeń geometrii[8].

Po wykładzie Wienera Hilbert miał wypowiedzieć słynne zdanie, iż powinno być możliwe zamienienie w aksjomatach geometrii „punktów, linii i płaszczyzn" na „stoły, krzesła i kufle do piwa" bez utraty ważności tych aksjomatów[9]. Hilbert zauwa-

[8] H. Wiener, *Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 1890/1891, nr 1, s. 46.
[9] Por. L. Corry, *David Hilbert and the Axiomatization of Physics*, Dordrecht 2004, s. 75.

żył, że *metoda aksjomatyczna* pozwala na „pogłębienie podstaw konkretnej dziedziny wiedzy – pogłębienie konieczne dla każdego gmachu, który ktoś chciałby rozbudować i uczynić wyższym, zachowując jego stabilność”[10]. W głównej mierze odnosił to do geometrii i arytmetyki, ale nie tylko, gdyż znane są jego próby aksjomatyzacji innych dziedzin, np. fizyki[11]. Według przekazów świadków miał zacząć budować aksjomatykę geometrii już w pociągu w drodze powrotnej do Królewca[12]. Wykład Wienera, jak można spekulować, otworzył Hilbertowi oczy na abstrakcyjny charakter *modelu matematycznego*. Intuicja Hilberta była najprawdopodobniej taka, że potrafił „oderwać” intelektualnie samą formułę od jej znaczenia, albo inaczej – używając intuicji atomizmu logicznego, oderwać ją od faktu, który opisuje. Ówcześnie, jak się zdaje, było to nowatorskie odkrycie.

Drugi aspekt metody aksjomatycznej podkreślany przez Hilberta najlepiej wyrażają następujące słowa:

> Przez aksjomatyczne odkrywanie prawdy matematycznej rozumiem badania, które nie zmierzają do znalezienia nowych albo

[10] D. Hilbert, *Mechanik*, cyt. za: L. Corry, *The Origin of Hilbert's Axiomatic Method*, [w:] *The Genesis of General Relativity*, red. J. Renn, t. 4, Dordrecht 2006, s. 146.

[11] Lista tych dziedzin jest obszerniejsza i obejmuje: geometrię, mechanikę klasyczną, termodynamikę, rachunek prawdopodobieństwa, elektrodynamikę i teorię względności.

[12] Por. w tej sprawie dokładniej: J. Dadaczyński, *Arytmetyka u początku abstrakcyjnego pojmowania geometrii przez Hilberta*, „Filozofia Nauki” 2012, nr 3, s. 99–109.

> bardziej ogólnych twierdzeń związanych z tą prawdą, ale do określenia miejsca tego twierdzenia w systemie znanych prawd w taki sposób, że można jasno powiedzieć, jakie warunki są konieczne i wystarczające, by prawdę tę ugruntować[13].

Hilbert podkreśla tu systemowy charakter matematyki i zwraca uwagę, że metoda aksjomatyczna nie ma funkcji heurystycznych – nie musi prowadzić do nowych wyników; jej zadaniem jest raczej umożliwienie *lepszego zrozumienia* prawdy matematycznej.

Jesteśmy też przekonani, że na rozwój Hilbertowskiego formalizmu pewien wpływ wywarła filozofia Immanuela Kanta. Oczywiście, Hilbert nie odnosi się do myśli filozofa z Królewca w tak bezpośredni sposób, jak czyni to choćby L.E.J. Brouwer. Niemniej nie sposób zaprzeczyć, że Hilbert często posługuje się Kantowskim żargonem, mówiąc choćby sporo o intuicji. Można oczywiście zauważyć, że był to nie tyle żargon Hilberta, ile raczej żargon epoki: mniej lub bardziej bezpośrednie nawiązania do filozofii matematyki Kanta można znaleźć u wszystkich niemal matematyków, którzy tworzyli na przełomie XIX i XX wieku. W dalszej części tego artykułu chcemy jednak przekonywać, że inspiracje Kantowskie – w przypadku programu Hil-

[13] D. Hilbert, *Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*, „Proceedings of the London Mathematical Society” 1902–1903, t. 35, s. 50; cyt. za: V. Peckhaus, *The Pragmatism of Hilbert’s Programme*, „Synthese”, November 2003, nr 1–2, z. 137, s. 141–156.

berta – sięgają znacznie głębiej niż sposób wyrażania się i stosunkowo nieliczne wypowiedzi bezpośrednio przywołujące Kanta. Uważamy bowiem, że filozofia Hilberta zawiera *ukrytą metafizykę* podmiotu matematycznego, która w swoim ogólnym zarysie odpowiada teorii podmiotu transcendentalnego opisanego w *Krytyce czystego rozumu*.

2. Program Hilberta[14]

Hilbert rozpoczął badania podstaw matematyki pod koniec XIX wieku. Przez ponad 20 lat jego poglądy ewoluowały, a dojrzałą ich formę określa się mianem programu Hilberta. Program wychodzi z pewnych postulatów. Uważamy, że można je sformułować w sposób następujący:

(P1) Zachować całą matematykę, włącznie z jej częścią niekonstruktywną.

Wydaje się, że najważniejszą motywacją programu Hilberta była próba obrony całej, również niekonstruktywistycznej, matematyki przed atakami Kroneckera (częściowo Gordana) oraz intuicjonistów. Właśnie problem dotyczący dowodu twierdzenia o bazie uświadomił Hilbertowi niebezpieczeństwa związane z konstruktywizmem. W 1926 roku Hilbert pisał:

[14] Ta część artykułu opiera się na książce A. Olszewski, *Teza Churcha…*, dz. cyt.

> To, co robił Weyl i Brouwer, to nic innego jak pójście w ślady Kroneckera! Próbują oni uratować matematykę, wyrzucają wszystko, co sprawia kłopot. (...) Jeśli zgodzimy się na takie propozycje, to ryzykujemy utratę wielu największych naszych skarbów[15].

Hilbert wielokrotnie podkreślał, że odrzucenie zasady wyłączonego środka w duchu intuicjonizmu prowadzi do paraliżu badań matematycznych (np. zauważał: „Nie możemy porzucić zasady wyłączonego środka, ani żadnego innego prawa logiki Arystotelesa [...], gdyż bez nich konstrukcja analizy staje się niemożliwa")[16]. Motywacja, by pozostać „w raju, do którego wprowadził nas Cantor", była niezwykle silna.

Z tym postulatem ściśle związana była inna idea Hilberta, którą najdobitniej wyraził w 1900 roku w Paryżu: „dla nas [matematyków] nie ma żadnego *ignorabimus* (...)"[17]. A w dużo późniejszym, słynnym wykładzie dodawał: „W opozycji do głupiego *ignorabimus* naszym sloganem powinno być: Musimy wiedzieć! – Będziemy wiedzieć!"[18]. Wypowiedź tę można potraktować jako drugi postulat programu Hilberta:

---

15 Cyt. za: R. Murawski, *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne" 1993, t. 30, s. 51–72.

16 D. Hilbert, *The Foundations of Mathematics*, [w:] *From Frege to Godel: A Sourcebook in Mathematical Logic*, red. J. Van Heijenoort, Cambridge, MA 1879–1931, s. 1067.

17 D. Hilbert, *Mathematical Problems: Lecture Delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 1902, no. 6, s. 437–79.

18 Wykład Hilberta z 1930 roku na Kongresie Niemieckiego Stowarzyszenia Nauk Przyrodniczych i Medycznych, dostępny na stronie:

(P2) Można podać dowód wszelkich twierdzeń matematycznych.

Hilbert dostrzegał jednak problemy związane z dowodami niekonstruktywistycznymi. Redukcyjny dowód niesprzeczności matematyki, sprowadzający ją do teorii mnogości, natrafia na przeszkody, gdyż teoria mnogości jest uwikłana w różne paradoksy (np. paradoks Russella). Skoro tak, to póki nie dostarczy się zadowalającego dowodu niesprzeczności arytmetyki, nie będzie można ufać dowodom niekonstruktywnym. W związku z tym trzeba stosować „bezpieczne" metody finitystyczne:

(P3) W matematyce stosować należy wyłącznie metody finitystyczne.

„Finityzm to pogląd metodologiczny, który sprowadza się do ograniczenia myśli matematycznej do tych obiektów, które są intuicyjnie obecne jako bezpośrednie doświadczenie przed wszelką myślą, i do takich operacji i metod rozumowania o tych obiektach, które nie wymagają wprowadzenia pojęć abstrakcyjnych, a w szczególności odwołania się do nieskończoności"[19]. Jak pisze sam Hilbert:

> Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś intuicyjnie: pewne pozalogiczne konkretne obiekty, które jawią się jako

---

http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio.mp3.

[19] R. Zach, *Hilbert's Program*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/.

> doświadczane bezpośrednio przed wszelkim myśleniem (...). W szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt (...) jest bezpośrednio jasny i rozpoznawalny[20].

Hilbert wskazuje zatem, że finitystycznymi obiektami są znaki: konkretne i doświadczane bezpośrednio. Trudno jednak dokładnie sprecyzować, co ma tu na myśli. Przede wszystkim znaki nie są obiektami fizycznymi („znakami na papierze"). W związku z tym William Tait[21] zaproponował, by Hilbertowskie znaki traktować jako typy (*types*), a nie egzemplarze (*tokens*). Typy są jednak pewnymi obiektami poza czasem i przestrzenią; tymczasem Paul Bernays zauważa:

> Nie jest zgodne z podstawowymi poglądami Hilberta, by wprowadzić liczby jako obiekty abstrakcyjne „o całkiem innych własnościach niż przedmioty poznawalne zmysłowo", które „istnieją całkowicie niezależnie od nas". W ten sposób znaleźlibyśmy się poza dziedziną tego, co bezpośrednio pewne. W szczególności stało by się to jasne w związku z faktem, że musielibyśmy w konsekwencji uznać, iż wszystkie liczby istnieją równocześnie – a to zakładałoby już na początku tezy, które Hilbert uważa za problematyczne[22].

[20] D. Hilbert, *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 1926, nr 95, s. 161–190.
[21] W. Tait, *Finitism*, „Journal of Philosophy" 1981, nr 78, s. 524–546.
[22] P. Bernays, *Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen*, „Mathematische Annalen" 1923, nr 90, s. 159–63.

Problem charakteru „finitystycznych znaków” okazuje się jeszcze bardziej skomplikowany, jeśli weźmiemy pod uwagę, że Hilbert raz po raz odwołuje się w tym kontekście do intuicji. Nawet w przywoływanej powyżej wypowiedzi zauważa, że „jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś intuicyjnie”. Zdaje się to wskazywać, że Hilbert konstruuje swój program w filozoficznym paradygmacie Kanta. Tak też interpretują poglądy Hilberta Philip Kitcher i Richard Zach[23].

By przedstawić dalsze szczegóły programu Hilberta, musimy omówić kluczowe dla niego odróżnienie dwóch rodzajów twierdzeń i dowodów matematycznych: realnych i idealnych. Przyjrzyjmy się następującemu dłuższemu fragmentowi:

> (...) Nawet elementarna matematyka zawiera, po pierwsze, formuły odnoszące się do treściowych wypowiedzeń skończonych sądów (głównie numerycznych równań i nierówności oraz złożonych z nich, bardziej skomplikowanych wypowiedzeń), które możemy określić mianem realnych sądów teorii, oraz, po drugie, formuł, które – tak jak zmienne treściowej teorii liczb – same w sobie nic nie znaczą, ale są obiektami rządzonymi przez nasze reguły i muszą być traktowane jak idealne przedmioty teorii.

---

[23] Por. P. Kitcher, *Hilbert's Epistemology*, „Philosophy of Science” 1976, nr 43, s. 99–115; R. Zach, *Hilbert's Finitism*, dysertacja doktorska, Berkeley 2001. Por. też M. Panza, *Mathematical Proofs*, „Synthese” 2003, nr 1–2, s. 119–158.

Te rozważania pokazują, że opracowanie koncepcji formuł jako sądów idealnych wymaga jedynie postępowania w sposób naturalny i spójny, zgodnie z linią rozwoju praktyki matematycznej. Stąd jest naturalne i spójne traktować nie tylko zmienne matematyczne, ale także funktory oraz zmienne logiczne, tj. zmienne zdaniowe A, B, C..., tak jak liczebniki i litery w algebrze i uważać je także za znaki, które same w sobie nic nie znaczą, a są jedynie elementami budującymi sądy idealne.

W rzeczy samej, istnieje ważny powód takiego rozszerzenia formalnej perspektywy algebry na całą matematykę, gdyż jest to sposób na uniknięcie podstawowego problemu, który pojawia się już w elementarnej teorii liczb. Spójrzmy na równanie:

$$a + 1 = 1 + a;$$

Gdybyśmy chcieli traktować je jako przekazujące informację, że

$$a + 1 = 1 + a,$$

gdzie „a" oznacza dowolną daną liczbę, to wypowiedzi tej nie można byłoby zanegować, gdyż sąd, że istnieje liczba „a", dla której:

$$a + 1 \neq 1 + a,$$

nie ma żadnego finitystycznego znaczenia; nie możemy przecież wypróbować wszystkich liczb. Zatem przyjmując nastawienie finitystyczne, nie moglibyśmy wykorzystać alternatywy, która głosi, że równanie takie jak powyższe, w którym występuje nieokreślony liczebnik, albo jest spełnione przez każdy liczebnik, albo może być odrzucone przez kontrprzykład, jako że alternatywa ta istotnie zależy od założenia, że można zanegować wypowiedź, iż badane równanie zawsze zachodzi[24].

Przytoczyliśmy tę wypowiedź Hilberta w całości, gdyż odróżnienie sądów realnych i idealnych jest z jednej strony kluczowe dla programu Hilberta, a z drugiej stanowi źródło sporych niejasności i kontrowersji interpretacyjnych. Te niejasności i kontrowersje biorą się stąd, że Hilbert wielokrotnie wypowiadał się na temat podstaw matematyki. Najpierw (na początku XX wieku) jego poglądy kształtowały się w opozycji do filozofii matematyki Kroneckera. Po 1905 roku Hilbert zajął się inną problematyką (fizyką), by w 1917 roku, pod wpływem *Principia mathematica* Bertranda Russella i Alfreda N. Whiteheada, powrócić do problemów z zakresu logiki i podstaw matematyki. Uwagi Hilberta z tego okresu sugerują, że sprzyjał on wtedy programowi logicyzmu, który jednak odrzucił wyraźnie na początku lat dwudziestych. Rozpoczął się wtedy etap precyzowania i realizacji przez Hilberta – przy wydatnej pomocy jego uczniów – własnego programu podstaw matematyki, który, rzecz jasna, wykorzystywał najważniejsze intuicje wyrażane już wcześniej (w pierwszych latach XX wieku).

Odróżnienie sądów realnych i idealnych – które uważamy za centralne dla programu Hilberta – nastąpiło dopiero w 1926 roku, a zasygnalizowane zostało ledwie trzy lata wcześniej[25].

---

[24] D. Hilbert, *The Foundations of Mathematics*, dz. cyt.
[25] Por. R. Zach, *Hilbert's Program*, dz. cyt.

Hilbert używa trzech par wyrażeń na określenie charakteru twierdzeń matematycznych:

(a) realne vs. idealne;

(b) finitystyczne vs. infinitystyczne;

(c) treściowe (*inhaltlich*) vs. formalne.

Problem w tym, że nie podaje precyzyjnych definicji tych pojęć, stąd interpretowane są one na różne sposoby. W związku z tym poniżej przyjrzymy się dwóm różnym interpretacjom, które skutkują dwoma sposobami rozumienia całego programu Hilberta. Pierwsza interpretacja opiera się na analizach Michaela Detlefsena[26], choć nie uwzględnia ich instrumentalistycznej wymowy. Druga wykorzystuje egzegezę zaproponowaną przez Davida Watsona Gallowaya[27].

Detlefsen podsumowuje odróżnienie sądów idealnych i realnych w sposób następujący[28]. Sądy (i dowody) realne to te, „których wartość epistemiczna bierze się z oczywistości ich zawartości", zaś sądy (i dowody) idealne to te, „których wartość epistemiczna bierze się z roli, jaką odgrywają one w pewnym formalnym algebraicznym czy obliczeniowym schemacie". Detlefsen sugeruje zatem, by Hilbertowskie pojęcie „idealne" uważać za równoważne pojęciu „formalne", natomiast pojęcie

---

[26] M. Detlefsen, *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht 1986.

[27] D.W. Galloway, *Finitism: An Essay on Hilbert's Programme*, praca doktorska, MIT 1991.

[28] M. Detlefsen, *Hilbert's Program...*, dz. cyt. s. 4.

„realne" traktować jak równoważne pojęciu „treściowe". W tej samej interpretacji matematyka realna może być zarówno finitystyczna, jak i niefinitystyczna. Przykładem na niefinitystyczne obiekty matematyczne, które rozumiane są realnie (treściowo), są wszystkie niekonstruktywne dowody, które stanowiły przedmiot krytyki Kroneckera i intuicjonistów. Z kolei wyrażenia matematyki idealnej można traktować na dwa sposoby: albo wyłącznie infinitystycznie[29] (np. zmienna „a" w przywoływanym wyżej równaniu przebiega wszystkie liczby naturalne), albo wyłącznie finitystycznie („a" traktowane jest jako skończony symbol „pozbawiony treści"). A zatem:

(Interpretacja 1)

(a) Wszystkie sądy i dowody idealne są zarazem formalne.

(b) Wszystkie sądy i dowody realne są zarazem treściowe.

(c) Niektóre sądy realne są finitystyczne.

(d) Niektóre sądy realne są infinitystyczne.

(e) Sądy idealne można traktować na dwa sposoby: wyłącznie jako infinitystyczne bądź wyłącznie jako finitystyczne.

---

[29] Hilbert w jednym z artykułów wyjaśnił, co rozumie przez *pozaskończone metody*: „Pozaskończone wnioskowania będą oznaczone w potocznym języku przez następujące słowa: *wszystkie*, *istnieje*, *tertium non datur*, *indukcja zupełna*" („Die transfiniten Schlussweisen werden in der gewöhnlichen Sprache durch folgende Stichworte bezeichnet: *alle*, *es gibt*, *tertium non datur*, *vollständige Induktion*"). D. Hilbert, *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, „Mathematische Annalen" 1923, t. 88, s. 156.

W tym ujęciu strategia proponowana przez Hilberta przedstawia się następująco. Wyrażenia idealne można traktować finitystycznie, jako „znaki bez treści". Tak np. w przywoływanym równaniu:

$$a + 1 = 1 + a$$

symbol „a" można traktować idealnie bądź realnie. Jeśli traktowany jest on realnie, to stanowi zmienną, która przebiega przeliczalnie wiele liczb; w takiej sytuacji „a" coś „znaczy". To prowadzi do wskazanych problemów z zastosowaniem zasady wyłączonego środka. Tymczasem potraktowanie „a" jak wyrażenia matematyki idealnej sprawia, że „a" nic nie znaczy, a jedynie może być przedmiotem operacji przeprowadzanych zgodnie z pewnymi przyjętymi regułami. Co ważniejsze, „a" rozumiane idealnie można traktować jako konkretny, dany w intuicji (= oczywisty) znak.

Idea Hilberta sprowadza się do tego, by całą matematykę wywieść z finitystycznie rozumianych sądów idealnych, stąd pomysł systemu formalnego i Hilbertowska teoria dowodu. Taki sposób postawienia sprawy narażony jest na zarzut, który Detlefsen określa mianem problemu Fregego[30]. W 1903 roku Gottlob Frege pisał:

> (…) rozumowanie nie składa się ze znaków. Możemy jedynie powiedzieć, że przy przejściu od jednej grupy znaków do drugiej może nam się czasami zdawać, iż przedstawiono nam rozumo-

[30] Por. M. Detlefsen, *Hilbert's Program*..., dz. cyt.

wanie. Rozumowanie (wynikanie) po prostu nie należy do dziedziny znaków; stanowi ono raczej wypowiedzenie sądu dokonanego w zgodzie z prawami logiki na bazie wcześniej uznanych sądów. Każda z przesłanek jest określoną myślą rozpoznawaną jako prawdziwa; także w konkluzji pewna określona myśl jest rozpoznawana jako prawdziwa[31].

Zarzut Fregego jest poważny i wskazuje na najbardziej problematyczną i rzadko komentowaną cechę programu Hilberta. Detlefsen twierdzi, że rozwiązaniem problemu Fregego jest stosowana przez Hilberta Strategia Wymiany Metamatematycznej: dowody uzyskane w matematyce idealnej są oceniane na poziomie metamatematyki, która jest treściowa oraz finitystyczna. Należy w tej sytuacji zapytać, co zyskuje się poprzez wprowadzenie teorii dowodów przeprowadzanych na zdaniach idealnej matematyki, skoro i tak muszą one podlegać ocenie metamatematycznej, która jest „treściowa"? Odpowiedź Hilberta na ten zarzut jest złożona[32]. Po pierwsze, Hilbert stwierdza, że jego metoda jest bardziej skuteczna (efektywna) niż tradycyjne, treściowe metody matematyczne. Po drugie, pozwala ona na precyzyjne przedstawienie wszystkich kroków rozumowania. Dzięki przeprowadzaniu operacji na zdaniach matematyki idealnej mamy pełną kontrolę nad każdym krokiem dowodu. Związane jest to – po trzecie – z faktem, że proponowana metoda

[31] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena 1903, t. 2, s. 82.
[32] Por. D. Hilbert, *The Foundation of Mathematics*, dz. cyt.

jest finitystyczna. W końcu – po czwarte – Hilbert nie sugeruje, by całkiem wyrugować matematykę treściową. Wiele dowodów matematycznych, np. w elementarnej teorii liczb, ma tak prostą postać „treściową", że bezcelowe i nieefektywne byłoby przeprowadzanie ich w formie „idealnej". Niemniej duża część matematyki treściowej, w szczególności ta wymagająca dowodów niekonstruktywnych, daje się dowieść środkami finitystycznymi jedynie w matematyce idealnej.

Trzeba raz jeszcze podkreślić, że zaproponowana przez Hilberta metoda dowodzenia twierdzeń matematycznych ma „dwie warstwy" czy też „dwa etapy". Pierwszy z nich to przeprowadzony w matematyce idealnej dowód w sensie ścisłym, w którym każdy krok dowodu jest albo aksjomatem systemu, albo wynika z aksjomatu lub innego dowiedzionego wcześniej zdania na mocy reguł inferencyjnych. Drugi polega na zastosowaniu Strategii Wymiany Metamatematycznej i sprowadza się do metamatematycznej oceny uzyskanego twierdzenia, tj. do przypisania zdaniu matematyki idealnej treści matematycznej. Widać z tego jasno, że uznawanie, iż formalizm programu Hilberta redukuje matematykę do „wolnej gry symboli", jest nieporozumieniem.

Przejdźmy teraz do drugiej interpretacji, która zdaje się dominować w historycznych badaniach nad programem Hilberta[33]. Podsumować ją można krótko w sposób następujący:

---

[33] D.W. Galloway, *Finitism…*, dz. cyt. Por. także R. Zach, *Hilbert's Finitism*, dz. cyt.

(Interpretacja 2)

(a) Sądy i dowody realne = sądy i dowody treściowe = sądy i dowody finitystyczne.

(b) Sądy i dowody idealne = sądy i dowody formalne = sądy i dowody infinitystyczne.

Galloway – zwolennik tej interpretacji – twierdzi dodatkowo, że nie wszystkie wyrażenia symboliczne (np. zmienne) należą do matematyki idealnej. Uważa, że finitystyczną część matematyki można utożsamić z *Primitive Recursive Arithmetics* Thoralfa Skolema.

Według Gallowaya program Hilberta składa się z trzech elementów: programu niesprzeczności, programu konserwacji i tzw. Głównego Argumentu (*Master Argument*). Program niesprzeczności polega na udowodnieniu niesprzeczności systemu formalnego, w którym zawarta jest matematyka infinitystyczna. Program konserwacji zmierza do wykazania, że cała matematyka klasyczna jest konserwatywnym rozszerzeniem finitystycznego fragmentu matematyki. Główny Argument pokazuje z kolei związek między oboma programami: wykazujemy w nim, iż jeśli mamy finitystyczny dowód niesprzeczności dla systemu idealnego I, to dla dowolnej skończonej formuły S dowiedlnej w I możemy efektywnie skonstruować czysto finitystyczny dowód S.

Interpretacja Gallowaya budzi pewne wątpliwości. Po pierwsze, trudno ją pogodzić z wyraźnymi deklaracjami Hilberta. W cytowanym powyżej fragmencie wykładu z 1926 roku Hilbert *explicite* stwierdza, że zmienne, funktory logiczne i inne wyrażenia budujące sądy idealne należy traktować jak skończone znaki. Po drugie, trudno zrozumieć, dlaczego Hilbert wyróżnia trzy różne pary pojęć, które oznaczają to samo. Wreszcie nie jest do końca jasne, w jaki sposób dowieść można niesprzeczności systemu idealnego *I*, jeśli formuły tego systemu nie są traktowane finitystycznie.

Wydaje się, że przywołane różnice i wątpliwości interpretacyjne nie są przypadkowe. Winę za nie ponosi – w pewnej mierze – sam Hilbert, który nie przedstawiał swych idei filozoficznych z jakąś nadzwyczajną jasnością. Pewne znaczenie ma również fakt, że koncepcje niemieckiego matematyka ewoluowały w czasie. Według nas program Hilberta można przedstawić w sposób następujący:

(ETAP 1) Identyfikacja niebudzącej wątpliwości, finitystycznej części matematyki realnej (treściowej).
(ETAP 2) Formalizacja tej części matematyki (przy czym nie ma znaczenia, czy tę formalną część będziemy już nazywać matematyką idealną, czy ciągle realną).
(ETAP 3) Zbudowanie odpowiedniego systemu formalnego (aksjomatów i reguł inferencyjnych), z których da się zrekonstruować finitystyczną część matematyki. Sformalizowana matematyka treściowa pełni w tym procesie funkcję heurystyczną; można zatem powiedzieć, że na tym etapie aksjomaty traktowane są „treściowo".
(ETAP 4) Potraktowanie skonstruowanego systemu formalnego jako zbioru skończonych znaków (finitystyczna matematyka idealna w sensie Detlefsena).

(ETAP 5) Dowód niesprzeczności (i ewentualne inne dowody metamatematyczne) systemu formalnego. Dowody te są przeprowadzane w metamatematyce, która jest finitystyczna i treściowa (operuje się tu na skończonych znakach).

(ETAP 6) Metamatematyczna (treściowa) ocena („interpretacja") twierdzeń wygenerowanych przez system formalny. Udowodniona wcześniej niesprzeczność tego systemu gwarantuje prawdziwość uzyskanych twierdzeń (na mocy argumentu przypominającego Główny Argument Gallowaya).

Jak widać, tak zarysowany program przypomina metodę Gordana: w trakcie obliczeń wyrażenia zapisane symbolicznie traktujemy jak „pozbawione treści", a ich treściowej oceny dokonujemy jedynie na wstępie (formułując aksjomaty) i na końcu (metamatematycznie oceniając uzyskane wyniki). Podobieństwo to jest jednak złudne. Kluczowa różnica obu ujęć sprowadza się do tego, że Hilbert mówi o stworzeniu systemu aksjomatycznego. System ten – by uwiarygodnić uzyskane w jego ramach wyniki – należy za każdym razem poddać analizie, aby wykazać, iż jest on niesprzeczny, zupełny i rozstrzygalny.

Postulat niesprzeczności jest oczywisty i był powtarzany przez Hilberta przy każdej okazji prezentacji idei systemu formalnego i dowodu. W wykładzie z 1927 roku Hilbert tak przedstawia to zagadnienie, wiążąc je z wprowadzeniem rozróżnienia na matematykę idealną i realną:

W obecnej sytuacji problemowi niesprzeczności można w pełni zaradzić, jako że celem po wprowadzeniu przedmiotów idealnych staje się wykazanie, iż niemożliwe jest otrzymanie dwóch logicznie sprzecznych sądów, np. Y i ~Y. Jak zaznaczałem, zdanie

$$(A \,\&\, {\sim}A) \rightarrow B$$

wynika logicznie z aksjomatów dla negacji. Jeśli zastąpimy w nim A sądem Y, a B nierównością $0 \neq 0$, to otrzymamy:

$$(Y \,\&\, {\sim}Y) \rightarrow (0 \neq 0).$$

Gdy mamy już tę formułę, możemy wywieść formułę $0 \neq 0$ z Y i ~Y. By dowieść niesprzeczności, musimy więc jedynie wykazać, że $0 \neq 0$ nie można uzyskać z naszych aksjomatów poprzez zastosowanie obowiązujących reguł, a zatem że $0 \neq 0$ nie jest dowiedlne. A jest to zadanie, które mieści się w dziedzinie intuicji, tak jak np. w dziedzinie treściowej teorii liczb mieści się zadanie dowiedzenia, że pierwiastek kwadratowy z 2 jest liczbą niewymierną. (...) Sformalizowany dowód – tak jak liczebnik – jest konkretnym, poznawalnym obiektem, który można zakomunikować w całości. To, że ostatnią formułą dowodu jest „$0 \neq 0$", jest także własnością dowodu, którą można ustalić konkretnie. Taki dowód można przeprowadzić, co uzasadnia wprowadzenie naszych idealnych sądów. Jednocześnie łatwo dostrzec, że pozwala to także na rozwiązanie problemu (...) dowiedzenia niesprzeczności aksjomatów arytmetyki[34].

[34] D. Hilbert, *The Foundation of Mathematics*, dz. cyt.

Warto podkreślić, że proponowany przez Hilberta dowód niesprzeczności arytmetyki ma być dowodem metamatematycznym, tj. że istotna jego część opiera się na rozważaniach „treściowych", które jednak wykorzystują jedynie metody finitystyczne.

Drugim postulatem Hilberta odnośnie do systemu formalnego jest jego zupełność. Wymóg ten został po raz pierwszy zdefiniowany precyzyjnie w heidelberskich wykładach Hilberta z 1917 roku:

> Spójrzmy teraz na problem zupełności. Nazwiemy rozważany system aksjomatów zupełnym, jeśli zawsze uzyskamy sprzeczny system aksjomatów, jeśli tylko dodamy formułę, której nie da się wywieść z dotychczasowego systemu podstawowych formuł[35].

Problem zupełności wymaga dłuższego komentarza. Już we wcześniejszych pismach i wypowiedziach Hilberta można odnaleźć postulat zupełności, choć sformułowany nieformalnie bądź ograniczony do jednej dziedziny matematycznej i przedstawiony jako aksjomat. I tak w *Grundlagen der Geometrie* wprowadzony został aksjomat V(2), który stwierdza, że niemożliwe jest rozszerzenie systemu punktów, linii i płaszczyzn poprzez dodanie nowych obiektów tak, by inne aksjomaty pozostały

[35] D. Hilbert, *Prinzipien der Mathematik*, wykład z 1917 roku, cyt. za: W. Sieg, *Hilbert's Programs: 1917–1922*, „Department of Philosophy" 1997, Paper 540, http://repository.cmu.edu/philosophy/540.

spełnione[36]. W 1905 roku Hilbert sformułował podobny aksjomat dla liczb rzeczywistych. W tym samym dziele postawił ogólne pytanie o zupełność: czy system aksjomatów wystarcza, by dowieść wszystkich „faktów” badanej teorii?[37]

Łatwo zauważyć, że pojęcie zupełności sformułowane przez Hilberta w 1917 roku jest własnością systemu formalnego (jest zatem pojęciem metamatematycznym). Co więcej, zdefiniowana własność to tzw. zupełność (syntaktyczna) w sensie Posta. Należy ją odróżnić od tzw. negacyjnej zupełności syntaktycznej definiowanej w sposób następujący:

> System S nazywamy zupełnym w sensie negacyjnym, jeżeli dla każdej formuły A systemu S (tj. wyrażonej w języku systemu S) albo A, albo ~A jest twierdzeniem systemu S.

Łatwo zrozumieć, dlaczego Hilbert posługuje się pojęciem zupełności w sensie Posta, a nie zupełności negacyjnej. Jego postulat ma odnosić się do wszelkich systemów formalnych, w tym do systemów logicznych. W systemach takich, np. w rachunku zdań bądź w rachunku predykatów, zupełność negacyjna w sposób trywialny nie jest spełniona (np. ani *p*, ani ~*p* nie są twierdzeniami rachunku zdań).

[36] Wydaje się zatem, że taki wymóg zupełności miał charakter systemowy, a nie metalogiczny, w przeciwieństwie do poglądów z 1917 roku.

[37] Por. R. Zach, *Hilbert's Finitism*, dz. cyt.

Hilbert nie formułuje także wymogu zupełności semantycznej (pełności), tzn. że wszystkie formuły systemu S, które są prawdziwe (dla określonego modelu), są jego twierdzeniami. Nie ma to związku, jak można by przypuszczać, z faktem, że wyraźne rozróżnienie między semantyką a syntaktyką nastąpiło dopiero wraz z pracami Alfreda Tarskiego w latach trzydziestych XX wieku. Badania historyków wskazują[38], że w szkole Hilberta odróżniano pojęcia zupełności syntaktycznej i semantycznej jeszcze przed rokiem 1920. Wydaje się raczej, że wymóg zupełności semantycznej nie został sformułowany w ramach programu Hilberta, gdyż nie współgrał on z formalistycznym charakterem tego programu; problem prawdziwości tez arytmetyki pojawia się dopiero na poziomie metamatematycznej oceny twierdzeń systemu formalnego, już po udowodnieniu twierdzenia o niesprzeczności, zupełności itd. Można jednak przyjąć, że dla Hilberta zupełność syntaktyczna (w sensie Posta) miała gwarantować zupełność semantyczną[39].

Trzeba jeszcze dodać, że wymóg zupełności można traktować jako precyzację jednego z aspektów postulatu Hilbertowskiego, który wynika z odrzucenia *ignorabimus* i który nazwaliśmy (P2):

(P2) Można dowieść wszelkich twierdzeń matematycznych.

Możemy zatem zapisać:

(P2.1) System formalny powinien być zupełny w sensie Posta.

---

38 Por. R. Zach, *Hilbert's Program*, dz. cyt.

39 Tamże.

Podobnie rzecz się ma z trzecim wymogiem sformułowanym przez Hilberta, tj. z rozstrzygalnością. Tak jak w przypadku zupełności Hilbert nawiązywał do rozstrzygalności już w wykładach z 1905 roku. Jednak, jak twierdzi Zach[40], pierwszym, który precyzyjnie wyraził ten postulat, był Heinrich Behmann, który w swej pracy habilitacyjnej z 1921 roku pisał:

> Należy wskazać ogólny zbiór instrukcji, na których podstawie da się określić, w skończonej liczbie kroków, poprawność bądź fałszywość dowolnego twierdzenia sformułowanego za pomocą środków logicznych[41].

Najsłynniejsze sformułowanie *Entscheidungsproblem* pochodzi od Hilberta i Wilhelma Ackermanna z *Grundzuge der theoretischen Logik* z 1928 roku:

> *Entscheidungsproblem* zostanie rozwiązany, gdy ktoś wskaże procedurę, która pozwoli na ustalenie w skończonej liczbie operacji, czy dane wyrażenie logiczne jest co do zasady prawdziwe bądź spełnialne. Rozwiązanie *Entscheidungsproblem* ma fundamentalne znacznie dla teorii tych wszystkich dziedzin, których twierdzeń dowodzić można logicznie ze skończonego zbioru aksjomatów[42].

40 Tamże.
41 Cyt. za: tamże.
42 D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzuge der theoretischen Logik*, New York 1946.

Jak wspominaliśmy, postulat rozstrzygalności można uważać za doprecyzowanie (P2):

(P2.2) System formalny powinien być rozstrzygalny.

Warto jednak zauważyć, że istnieje pewna różnica między wymogiem zupełności a wymogiem rozstrzygalności[43]. Ten pierwszy pojawiał się początkowo w pismach Hilberta jako aksjomat systemów formalnych (np. geometrii). Dopiero od około 1918 roku zaczęto go traktować jako metamatematyczny wymóg nałożony na system formalny. Rozstrzygalność nigdy nie była ujmowana jako aksjomat. Co więcej, problem rozstrzygalności formułowany jest przez Hilberta i jego uczniów bardziej jako pytanie, a nie jako postulat, który musi zostać spełniony przez system formalny.

3. Podmiot matematyczny

Tak rozumiany program Hilberta presuponuje pewne tezy odnośnie do cech, które musi spełniać podmiot uprawiający matematykę. Niektóre z tych własności są związane z samą ideą systemu formalnego. By móc skonstruować taki system i się nim posługiwać, podmiot musi potrafić co najmniej:

[43] Choć można rozumieć wymóg zupełności jako wymóg rozstrzygalności. Mianowicie teoria jest zupełna, gdy nie istnieją w niej wyrażenia nierozstrzygalne.

(P1) Identyfikować i reidentyfikować znaki.
(P2) Manipulować znakami.
(P3) Stosować reguły manipulacji znakami.
(P4) Reaplikować te reguły (potencjalnie wiele razy).

Trzecia presupozycja jest najciekawsza. Czym jest bowiem reguła manipulacji znakami? Weźmy dla przykładu regułę *modus ponens*:

A → B
A

B

gdzie A i B to metajęzykowe zmienne oznaczające dowolne, poprawnie zbudowane wyrażenia danego systemu formalnego. A i B odnoszą się zatem do *potencjalnie nieskończenie wielu* wyrażeń. Mówiąc inaczej, umiejętność zastosowania reguły to umiejętność manipulowania – w taki sam sposób – potencjalnie nieskończenie wieloma symbolami. Jest to, jak się wydaje, bardzo mocna cecha podmiotu matematycznego. Podobna sytuacja zachodzi w przypadku presupozycji P4: podmiot musi mieć zdolność do potencjalnie nieskończenie wielu zastosowań tej samej reguły.

Dodatkowe własności podmiotu wiążą się z rozumowaniami treściowymi, a zatem zarówno z finitystycznymi rozumowaniami matematycznymi, które mają prowadzić do sformułowania aksjomatów, jak i z metamatematyczną oceną uzyskanych w ramach systemu wyników. Podmiot Matematyczny musi zatem:

(P5) Postrzegać treściowo finitystyczne przedmioty matematyczne.

(P6) Potrafić przyporządkować tym przedmiotom znaki, a także umieć „odkodować" te przedmioty ze znaków.

Wszystko to wskazuje, że matematyka nie jest dla Hilberta „wolną grą symboli"; choć system formalny potrzebny jest po to, by uniknąć problemów z nieskończonością aktualną, nie wyczerpuje on matematyki.

Co ciekawe, Hilbert wypowiedział się *explicite* na temat Podmiotu Matematycznego. W nieopublikowanym wykładzie pt. *Logische Prinzipien des mathematischen Denkens* z 1905 roku, zanotowanym przez Ernsta Hellingera, Hilbert postulował istnienie nauki metodologicznie wcześniejszej od matematyki i nawet sformułował w przybliżeniu jeden z jej aksjomatów. Ów aksjomat nazwał Aksjomatem Myślenia (Aksjomatem Istnienia Inteligencji):

> Mam zdolność do myślenia *rzeczy* i oznaczania ich za pomocą prostych znaków (*a*, *b*, X, Y...) w tak całkowicie charakterystyczny sposób, że mogę je zawsze rozpoznać bez wątpliwości. Mój umysł operuje tymi oznaczonymi rzeczami na pewne sposoby, wedle pewnych praw, i jestem w stanie rozpoznać te prawa przez samoobserwację i doskonale je opisać[44].

[44] Cyt. za: M. Hallet, *Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought*, [w:] *Mathematics and Mind*, red. A. George, Oxford 1994.

Ta wypowiedź Hilberta wymaga krótkiego komentarza. Po pierwsze, podmiot ten doskonale „wpasowuje się" w finitystyczne tezy filozofii Hilberta. Można by wręcz powiedzieć, że opisany powyżej podmiot posiada dokładnie te własności, które są konieczne do „widzenia w intuicji" systemu formalnego rozumianego jako system skończonych symboli, dowodzenia (finitystycznie) twierdzeń metamatematycznych o tych symbolach, dokonywania treściowej, metamatematycznej oceny twierdzeń wytworzonych w ramach systemu formalnego itd. Z drugiej strony podmiot taki nie jest w stanie oceniać poprawnie (być pewny prawdziwości) twierdzeń infinitystycznych.

Po drugie, Hilbertowski Podmiot Matematyczny nosi wyraźny rys kantowski. Widać to jasno, gdy porówna się propozycję Hilberta z podobnym, na pierwszy rzut oka, „aksjomatem" nauki uprzedniej wobec matematyki, który sformułował w *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* z 1873 roku Ernst Schröder. „Aksjomat" ten, „jeden jedyny", jak określa go sam autor, to „aksjomat trwałości znaków". Głosi on:

> We wszystkich naszych derywacjach i konkluzjach znaki pozostają w naszej pamięci i – co może ważniejsze – na papierze (…). Bez tej zasady ustalonej w drodze dedukcji i generalizacji na podstawie bogatego doświadczenia jakakolwiek indukcja byłaby iluzoryczna, jako że dedukcja zaczyna się w chwili, gdy – po „przebraniu" własności przedmiotów w znaki – analiza przedmiotów zostaje zastąpiona analizą znaków[45].

[45] E. Schröder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra fur Lehrer und Studirende*, Leipzig 1873.

Ten Schröderowski „aksjomat" został wyśmiany przez znanego filozofa neokantowskiego Leonarda Nelsona. Zdaniem Nelsona takie znaki, którymi miałaby operować matematyka, byłyby „śladami kredy na tablicy. By znaleźć wnioskowania powszechnie ważne, matematyka potrzebuje pewnych warunków wstępnych odnośnie do stałości jej znaków; warunki te muszą być same apodyktycznie ważne. Jeśli przedmiotami matematyki byłyby ślady kredy na tablicy, matematyka potrzebowałaby apodyktycznie pewnego aksjomatu, twierdzącego, że ślady te są trwałe i że można postawić je w dowolnym miejscu na tablicy. I aksjomat ten – jako apodyktyczne twierdzenie – byłby twierdzeniem *a priori*. Wyobraźcie to sobie: wiedza *a priori* o wiecznie trwałej kredzie! Ktoś, kto uważa, że można obyć się bez ugruntowania matematyki na czystej intuicji czasu, musi w zamian związać los wiedzy apriorycznej z losem kredy i tablicy"[46]. Krytyka Nelsona wymierzona w „metafizykę kredy" jest w gruncie rzeczy krytyką takich prób ugruntowania matematyki, które zamiast do struktur podmiotu transcendentalnego odwołują się do empirii.

Nelson słuchał wykładów Hilberta w 1905 roku i wydaje się, że nie miał powodów, by krytykować Hilbertowski „aksjomat myślenia", tak jak to uczynił z postulatem Schrödera. Transcendentalność Hilbertowskiego podmiotu widać na dwóch poziomach. Po pierwsze, przedmioty, które podmiot matematyczny „widzi", nie mają charakteru empirycznego. Dotyczy

[46] L. Nelson, *Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik*, „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften" 1959, nr 34, s. 140.

to zarówno (treściowych) przedmiotów matematycznych, jak i znaków, którymi przedmioty te zastępujemy; nie jest to jednak przy tym kontemplacja obiektów platońskich. Po drugie, podmiot matematyczny jest zdolny do rozumienia i stosowania reguł – i to stosowania ich potencjalnie nieskończenie wiele razy.

Czym w takim razie różni się Hilbertowski Podmiot Matematyczny od Kantowskiego Podmiotu Transcendentalnego? Można zaryzykować twierdzenie, że – na najogólniejszym poziomie – niczym. Główna różnica między Kantem a Hilbertem sprowadza się do tego, że rozumienie, czym jest matematyka, zmieniło się w ciągu XIX wieku w zasadniczy sposób. Dla Kanta paradygmatem wiedzy matematycznej wciąż była geometria Euklidesa: i arytmetyka, i algebra miały swoje zakorzenienie w intuicji przestrzeni. Pokazuje to dobitnie Lisa Shabel, która – analizując podręcznik do matematyki Christiana Wolffa, z którego najprawdopodobniej uczył swych studentów Kant – wykazuje, że dla myślicieli XVIII wieku arytmetyka była ugruntowana na relacjach geometrycznych, algebra zaś nie stanowiła w ogóle odrębnej dyscypliny matematycznej, a jedynie narzędzie wykorzystywane w rozważaniach geometrycznych i arytmetycznych[47]. Tymczasem – jak ilustruje to dobitnie przywołana na początku tego artykułu historia problemu Gordana – dla Hilberta arytmetyka i algebra były już całkiem samodzielnymi, niesprowadzalnymi do geometrii dziedzinami matematyki. Tę

[47] Por. L. Shabel, *Kant on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts*, „Studies in the History and Philosophy of Science" 1998, t. 29, nr 4, s. 589–621.

różnicę między Kantem a Hilbertem można też zobrazować, przywołując sposób, w jaki rozumieli oni aksjomaty. Kant pisze:

> Matematyka jest zdolna do posiadania aksjomatów, gdyż za pomocą konstrukcji pojęć w danych naocznych przedmiotu może jego cechy powiązać z sobą *a priori* i bezpośrednio, np. że trzy punkty leżą zawsze w jednej płaszczyźnie. Zasada syntetyczna nie może natomiast nigdy być bezpośrednio pewna jedynie na podstawie pojęć[48].

I gdzie indziej:

> Zasady dyskursywne są czymś innym niż intuitywne, tzn. aksjomaty. Tamte domagają się zawsze jeszcze dedukcji, bez której te mogą zupełnie się obyć, a ponieważ te są właśnie z tego powodu oczywiste, czego zasady filozoficzne przy całej ich pewności nie mogą przecież nigdy udawać, więc nieskończenie wiele brak do tego, by jakiekolwiek twierdzenie syntetyczne czystego i transcendentalnego rozumu było tak oczywiste, jak zdanie „dwa razy dwa jest cztery"[49].

Dla Kanta zatem aksjomaty są twierdzeniami absolutnie pewnymi (bo *apriorycznymi*), które są oparte na bezpośrednim oglądzie intuicyjnym. Jako takie jednak są, po pierwsze,

---

[48] I. Kant, *Krytyka czystego rozumu*, tłum. R. Ingarden, Kęty 2006, B761.

[49] Tamże.

treściowe i, po drugie, nie odgrywają *żadnej istotnej roli inferencyjnej*. W gruncie rzeczy bez aksjomatów można by się obejść, jako że każde twierdzenie matematyczne udowadniamy – ostatecznie – dokonując odpowiedniej konstrukcji w naoczności. Zresztą monadyczna logika, którą dysponował Kant, byłaby nieprzydatna do wyprowadzania nietrywialnych twierdzeń matematycznych z tak rozumianych aksjomatów[50]. Tymczasem Hilbert przyznaje aksjomatom – które można potraktować jako ciąg nic nieznaczących symboli – rolę zgoła odmienną. Idea systemu aksjomatycznego jest sposobem na to, by pokazać powiązania między prawdami matematycznymi i lepiej je zrozumieć.

Te rozbieżności między Kantowskim a Hilbertowskim rozumieniem matematyki nie powinny przesłaniać istotnych podobieństw. I Kant, i Hilbert twierdzą, że matematyk nie zajmuje się ani obiektami empirycznymi, ani „czysto platońskimi". Obaj – jeden *explicite*, a drugi *implicite* – postulują istnienie podmiotu o charakterze *transcendentalnym*, którego cechy, przekraczające zdolności jakiegokolwiek podmiotu empirycznego, stanowią warunek konieczny uprawiania matematyki.

*   *   *

Jeśli nasze ustalenia są poprawne, to filozofia matematyki Hilberta zakłada bardzo silną metafizykę. Jest to *ukryta metafizyka*

[50] Por. B. Brożek, A. Olszewski, *The Mathematics of the Transcendental Ego*, „Copernicus Center Reports", t. 2, Kraków 2011 i literatura tam cytowana.

Podmiotu Matematycznego, który, choć z pewnymi zastrzeżeniami, można utożsamiać z Kantowskim Podmiotem Transcendentalnym. Nie powinno to jednak zaskakiwać. Elementy Kantowskie odgrywały kluczową, choć nieraz dobrze „ukrytą" rolę w wielu koncepcjach filozoficznych powstałych w pierwszej połowie XX wieku. Znakomitego przykładu dostarczają tu poglądy Rudolfa Carnapa. W *Der logische Aufbau der Welt* i w *Logical Syntax of Language* podjął on bezkompromisową próbę wyrugowania metafizyki z filozofii. W rozwiniętej wersji jego koncepcji, zgodnie z zasadą tolerancji, istniała możliwość wyboru dowolnego języka, który to wybór konstytuuje sposób pojmowania świata. Żaden język nie jest jednak w tym kontekście uprzywilejowany. Ten projekt Carnapa poniósł klęskę, którą Stanisław Wszołek podsumowuje w sposób następujący:

> [Carnap] był ukrytym kantystą. (…) [Jego] zamierzenia okazały się chybione. Okazały się takimi nie tylko dlatego, że postulat neutralności jest utopijny, ale także dlatego, że Carnap, zwalczając metafizykę m.in. Kanta, ciągle pracuje w ramach kantowskiego programu. Inaczej mówiąc, w Carnapowskim rozumieniu konstruowania lub konstytuowania, jak również w jego formalnym podejściu do kwestii filozoficznych, nie ma żadnej neutralności, gdyż logika kantyzmu przenika wszystkie projekty Carnapa. (…) Wybór systemu językowego, podobnie jak u Kanta, jest praktycznym wyborem na poziomie transcendentalnym. W tym kontekście „transcendentalny" znaczy tyle, że użytkownik języka decyduje o regułach na podstawie wartości, które kierują

jego wyborami. Oczywiście użytkownik języka nie jest neutralny. (…) Podmiot konstruujący nie jest podmiotem empirycznym, bo ten sam jest „owocem" konstrukcji. [Carnap mówi], że podmiot byłby empiryczny, gdyby „życie" i „oddychanie" były terminami w systemie semantycznym. A zatem jeśli podmiot nie ma charakteru empirycznego, to jaki jest jego status? Możliwa spójna odpowiedź każe przypisać mu transcendentalny charakter[51].

Bibliografia

Bernays P., *Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen*, „Mathematische Annalen" 1923, nr 90.

Corry L., *David Hilbert and the Axiomatization of Physics*, Dordrecht 2004.

Dadaczyński J., *Arytmetyka u początku abstrakcyjnego pojmowania geometrii przez Hilberta*, „Filozofia Nauki" 2012, nr 3.

Detlefsen M., *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht 1986.

Frege G., *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena 1903, t. 2.

From Frege to Godel: A Sourcebook in Mathematical Logic, red. J. Van Heijenoort, Cambridge, MA 1879–1931.

Galloway D.W., *Finitism: An Essay on Hilbert's Programme*, praca doktorska, MIT 1991.

[51] S. Wszołek, *Nieusuwalność metafizyki*, Kraków–Tarnów 1998, s. 370.

Gordan P., *Ueber einen Satz von Hilbert*, „Mathematische Annalen" 1893, vol. 42.

Hilbert D., Ackermann W., *Grundzuge der theoretischen Logik*, New York 1946.

Hilbert D., *Mathematical Problems: Lecture Delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 1902, nr 6.

Hilbert D., *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 1926, nr 95.

Kitcher P., *Hilbert's Epistemology*, „Philosophy of Science" 1976, nr 43.

Mathematics and Mind, red. A. George, Oxford 1994.

McLarty C., *Theology and Its Discontents: the Origin Myth of Modern Mathematics*, http://people.math.jussieu.fr/~harris/theology.pdf.

Murawski R., *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne" 1993, t. 30.

Nelson, *Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik*, „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften" 1959, nr 34.

Olszewski A., *Matematyka czy teologia? Hilbert, Gordan i początki formalizmu*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2012, t. LI.

Olszewski A., *Teza Churcha. Kontekst historyczno-filozoficzny*, Kraków 2009.

Panza, *Mathematical Proofs*, „Synthese" 2003, nr 1–2.

Peckhaus V., *The Pragmatism of Hilbert's Programme*, „Synthese", November 2003, nr 1–2, z. 137.

Schröder E., *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra fur Lehrer und Studirende*, Leipzig 1873.

Sieg W., *Hilbert's Programs: 1917–1922*, „Department of Philosophy" 1997, Paper 540, http://repository.cmu.edu/philosophy/540.

Tait W., *Finitism*, „Journal of Philosophy" 1981, nr 78.

The Genesis of General Relativity, red. J. Renn, t. 4, Dordrecht 2006.

Wiener H., *Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 1890/1891, nr 1.

Wszołek S., *Nieusuwalność metafizyki*, Kraków–Tarnów 1998.

Zach R., *Hilbert's Finitism*, dysertacja doktorska, Berkeley 2001.

Zach R., *Hilbert's Program*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/.